Un moteur de physique
Article 1 - Les bases

Gabriel Peyré
nikopol0@altern.org
www.orion3d.fr.st

Le 19 septembre 2001

Table des matières

Introduction

La logique voudrait que la lecture de cet article suive immédiatement celle de celui sobrement intitulé "*Détection de collisions*", puisque le moteur de physique à pour rôle de donner la réplique au moteur de collisions. Cependant, aucun pré-requis n'est nécessaire, et il peut sembler bon de "jongler" entre les deux articles, les notions présentées s'entremêlant à plusieurs reprises.

Dans l'ensemble, cet article se décompose en deux parties, liées à deux manières de résoudre les équations de la physique :

. Les outils de la *mécanique classique* vont nous occuper dans les parties 2, 3 et 4. La parie 2 présente les outils mis en jeux (ainsi que la résolution des équation quand "rien ne se passe"), alors que les deux parties suivantes présentent la manière de répondre de façon pratique aux deux types de collisions existantes.

. Enfin, les parties 5 et 6 se focalisent sur le problème des objets soumis à des contraintes (les personnages, par exemple). La partie 5 présente les techniques utilisées, alors que la partie 6 présente une implémentation des plus pragmatique.

Pour finir, je tiens à signaler que je ne rentrerais pas dans le détails des lois de la mécanique du solide. Pour de plus ample informations à ce sujet, on lira avec intérêt [BAR1] et [BAR2].

Chapitre 1

La physique du point

Pour commencer en douceur, attardons nous tout d'abord sur la mécanique du solide. Elles nous permettra d'énoncer des lois que l'on généralisera par la suite à un solide.

De plus, avec des bases aussi simple, on peut néanmoins s'amuser, en créant, par exemple, un moteur de particules avec des déflecteurs.

1.1 Les lois de la mécanique du point

Pour introduire la mécanique du solide, le plus simple est de partir de la *mécanique du point*, beaucoup plus simple, où chaque particule est caractérisée par :

. Sa position $\overrightarrow{Pos}$, qui est un vecteur 3D, que l'on notera représentera par "`float Pos[3];`".

. Sa vitesse $\overrightarrow{v}$, qui correspond à la dérivée de la position $\overrightarrow{Pos}$ par rapport au temps, et que l'on représentera par "`float V[3];`". On a donc la relation :

$$\overrightarrow{v} = \frac{d(\overrightarrow{Pos})}{dt} \tag{1.1}$$

. Sa masse m, que l'on représentera par "`float m;`".

. Enfin, les forces qui s'exercent sur l'objet, que l'on notera par abus de langage $\left(\overrightarrow{F_i}\right)_{i\in I}$, où i parcoure un nombre fini d'indice I. – TODO : insérer un schéma d'une particule –

La loi de la physique du point s'énonce alors comme suit :

$$\boxed{m.\overrightarrow{a} = m.\frac{d(\overrightarrow{v})}{dt} = \sum_{i\in I}\overrightarrow{F_i}} \tag{1.2}$$

1.2 La résolution des équations différentielles

1.3 La mécanique du solide

- *Euler* explicite
- *Runge Cutta* explicite
- *Verlet*

1.4 La création d'un système de particule

1.5 Les déflecteurs

Chapitre 2

La physique classique

Avant toute chose, il faut connaître parfaitement les lois de la la *physique du solide*. C'est plutôt rébarbatif, mais bon, c'est un passage obligé ... Grosso-modo, ces lois sont connues depuis plusieurs siècles, on s'aventure donc en terrain connu ! Attention, ceci ne veut pas dire que l'on ne va pas se livrer à quelques calculs plutôt complexes, si vous en voulez la preuve, rendez-vous à la partie 4 ...

2.1 Différence entre point et solide

En mécanique du solide, on peut considérer un objet (*solide*) comme un ensemble de points $(p_j)_{j \in J}$, soumis à des contraintes de positions relatives. Ceci signifie que l'on peut à tout moment trouver un repère R_0 dans lequel les points p_j sont immobiles les un par rapport aux autres. On pourrait donc se dire de façon naive que pour représenter notre solide, on a besoin de l'ensemble des positions, vitesse, et masses de tout nos points. Ceci dit, sans faire tenir le suspens plus longtemps, il est évident que l'on peut facilement trouver des manière plus adéquats de représenter notre objet.

Tout d'abord, nous utiliserons dans la suite les notations expliquées dans le tutorial "*représenter un objet 3D*", qui à chaque objet 3D fait correspondre une matrice de transformation, représentant son *repère local*. De quelles autres variables à-t-on besoin ? C'est cette question qui va nous occupé dans la suite de cette partie.

2.2 Masse et centre de gravité

Réglons dés maintenant le problème de la masse de notre objet Obj. Celle-ci peut-être vu comme la somme des masses de l'ensemble des particules qui composent notre objet, ou, de façon plus formelle, comme l'intégrale de l'élément de masse élémentaire dm sur l'ensemble de l'objet :

$$m = \iiint_{objet} \rho(x,y,z) dxdydz \quad (2.1)$$

$$= \iiint_{objet} dm \quad (2.2)$$

Ainsi, dans le cas d'un objet homogène, cette masse est simplement proportionnelle au volume de l'objet, $m = \rho.V(Obj)$, où ρ est la masse volumique de l'objet.

De plus, dans la suite de la discussion, on aura besoin d'introduire un point particulier, le centre de gravité, que l'on peut définir comme étant l'unique point G vérifiant l'égalité (on fixe O origine quelconque) :

$$m.\overrightarrow{OG} = \iiint_{objet} \overrightarrow{OM}.\rho(x,y,z) dxdydz \quad (2.3)$$

$$= \iiint_{objet} \overrightarrow{OM}.dm \quad (2.4)$$

où $\rho(x,y,z)$ représente la densité point M de coordonnées (x,y,z), (ie. $dm = \rho(x,y,z).dxdydZ$).

Dans le cas d'un objet constitué de N particules $(p_j)_{j=0}^N$ de masses $(m_j)_{j=0}^N$, on peut voir ce centre de gravité G comme le barycentre des N point associé des masses des particules :

$$m.\overrightarrow{OG} = \sum_{j=0}^{N} m_j.\overrightarrow{Op_j} \tag{2.5}$$

où l'on a bien sûr la relation :

$$\sum_{j=0}^{N} m_j = m \tag{2.6}$$

2.3 Rotation instantanée

Attaquons nous maintenant au vif du sujet, c'est à dire de ce qui fait la particularité de la mécanique du solide par rapport à la mécanique du point. La principale différence est le fait que l'objet possède une orientation, définie par le repère local dont nous avons parler plus haut. Ainsi, on montre qu'à tout moment, notre solide (représenté par notre repère local) est en rotation instantanée autour d'un axe $\overrightarrow{\omega_G}$ passant par G (centre de gravité). Par abus de langage, on notera $\overrightarrow{\omega}$ le vecteur $\overrightarrow{\omega_G}$.Cet axe est appelé "*axe de rotation instantanée*". Étant donné la vitesse du centre de gravité $\overrightarrow{v_G}$ ainsi que l'axe $\overrightarrow{\omega}$, on peut calculer la vitesse de tout point M de notre objet via la formule suivante :

$$\overrightarrow{v_M} = \overrightarrow{v_G} + \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{\omega} \tag{2.7}$$

2.4 Première loi de la mécanique du solide

Nous avons donc les 3 premières variables dont nous avons besoin pour calculer le mouvement d'un objet :

. La matrice de transformation T (le repère local de l'objet).

. La position du centre de gravité G dans le repère local.

. Le vecteur de rotation instantanée $\overrightarrow{\omega}$.

. La masse m de l'objet.

. Les forces $\left(\overrightarrow{F_i}\right)_{i\in I}$ qui s'exercent sur l'objet.

La première loi que l'on obtient est celle qui régie l'évolution en translation de notre objet, ie. la variation de la vitesse du centre de gravité. Elle est semblable à la loi classique en mécanique du point :

$$\boxed{m.\overrightarrow{a_G} = m.\frac{d(\overrightarrow{v_G})}{dt} = \sum_{i\in I} \overrightarrow{F_i}} \tag{2.8}$$

2.5 Matrice d'inertie

Pour trouver la deuxième loi, celle qui régie l'évolution de $\overrightarrow{\omega}$, nous avons besoin d'introduire deux concept : celui de moment d'une force, ainsi que celui de matrice d'inertie. Dans la suite, on considérera que chaque force $\overrightarrow{F}$ a un point d'application noté $P_{\overrightarrow{F}}$. Par exemple, la force poids $\overrightarrow{p} = m.\overrightarrow{g}$ s'exerce au centre de gravité G, alors qu'une force de fortement $\overrightarrow{f}$ s'exerce au point de contact.

Le moment d'une force caractérise la capacité de la force à faire tourner l'objet par rapport à un point donné. Dans la suite, on utilisera le moment des forces par rapport au centre de gravité. On notera (toujours par abuse de langage, on omettra l'indice G) $\Gamma_{\overrightarrow{F}}$ le moment de la force $\overrightarrow{F}$ au point G. Ce moment se calcul par la formule :

$$\Gamma_{\overrightarrow{F}} = \overrightarrow{GP_{\overrightarrow{F}}} \wedge \overrightarrow{F} \tag{2.9}$$

Enfin, en parallèle aux moment d'une force, on trouve la matrice d'inertie I_G d'un objet, exprimée au centre de gravité G de l'objet. Cette dernière caractérise la façon dont les moment des forces est répartie sur l'ensemble de l'objet. Ainsi, la matrice d'une toupie va permettre de transmettre surtout les moment verticaux, ce qui stabilisera la toupie quand on la fera tourner sur elle même. De façon mathématique, cette matrice s'exprime sous la forme :

$$I_G = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

avec les termes d'inerties suivants :

$$\boxed{\begin{array}{c} I_{xx} = \iiint_{Obj} (y^2 + z^2).\rho(x,y,z).dxdydz \\ I_{yy} = \iiint_{Obj} (x^2 + z^2).\rho(x,y,z).dxdydz \\ I_{zz} = \iiint_{Obj} (x^2 + y^2).\rho(x,y,z).dxdydz \\ I_{xy} = \iiint_{Obj} (x.y).\rho(x,y,z).dxdydz \\ I_{xz} = \iiint_{Obj} (x.z).\rho(x,y,z).dxdydz \\ I_{zy} = \iiint_{Obj} (z.y).\rho(x,y,z).dxdydz \end{array}}$$

Les intégrales sont calculées en centrant le repère local de l'objet au centre de gravité G. Il est bien sûr possible de calculer tout ceci au centre de l'objet directement, mais puisque dans l'ensemble de l'exposé, les loi de la mécanique du solide sont données par rapport au centre de gravité G, nous nous garderons de faire les calculs ailleurs (ce qui implique de réaliser des translations).

2.6 Intégration sur notre objet

Faisons une (bref) pose dans ce (long) exposé pour aborder une question importante : comment calculer ces intégrales sur l'objet, qui apparaissent à la fois dans la matrice d'inertie, et dans le calcul du centre de gravité ? Je pense que le plus simple est de faire un calcul approché comme suit :

. On désire calculer l'intégrale d'une fonction $f(x,y,z)$ sur l'ensemble de l'objet, c'est à dire :

$$\iiint_{objet} f(x,y,z)dxdydz \tag{2.11}$$

. Tout d'abord, calculer une bouding box autour de l'objet (boite englobante), la diviser en pleins de petits carrés de volumes égaux.

. Pour chaque petit volume se trouvant dans notre objet, ajouter Volume*f(x,y,z).

. Ainsi, on part de 0, et on ajoute pour chaque volume la quantité appropriée, ce qui fait qu'à la fin, on a une bonne approximation de l'intégrale.

Il est évident que ce genre de chose ne marche que sur des objets convexes (amusez vous à faire des tests d'appartenance avec des objets quelconques ...), donc je pense que le plus simple est de se limiter aux "*enveloppes convexes*" [1] des objets.

2.7 Deuxième loi de la mécanique du solide

Il est maintenant grand temps d'énoncer la deuxième formule de la mécanique du solide :

$$\boxed{I_G.\frac{d(\overrightarrow{\omega})}{dt} = \sum_{i \in I} \Gamma_{\overrightarrow{F_i}}} \tag{2.12}$$

Pour une démonstration succincte de cette formule, se reporter aux annexes.

1. L'enveloppe convexe est le plus petit convexe contenant l'objet

Chapitre 3

Intégration d'équations différentielles

3.1 Résolution d'équations différentielles

3.2 Schéma Euler explicite

3.3 Schéma Verlet

3.4 Schéma Runge Kutta 4

3.5 Choix dynamique du time step

Conclusion

Annexe A

Démonstration de la deuxième loi de la physique du solide

Bibliographie

[BAR1] David Baraf, An Introduction to Physically Based Modeling: Rigid Body Simulation I-Unconstrained Rigid Body Dynamics, -, 1997

[BAR2] David Baraf, An Introduction to Physically Based Modeling: Rigid Body Simulation II-Nonpenetration Constraints, -, 1997